SOLUCIÓN SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES

I. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES CUYOS TÉRMINOS SON MONOMIOS

Regla:

Se dividen el numerador y el denominador por sus factores comunes hasta que sean primos entre sí. Para el resultado final no deben quedar EXPONENTES NEGATIVOS.

- **Simplificar o reducir a su más simple expresión:**

1. $\frac{9x^2y^5}{24a^2x^3y^4}$

Solución:

Dividiendo entre 3 tanto el numerador como el denominador:

$$\frac{3x^2y^5}{8a^2x^3y^4}$$

Aplicando la propiedad de los exponentes para cocientes y simplificando:

$$\frac{3x^{2-3}y^{5-4}}{8a^2} = \frac{3x^{-1}y^1}{8a^2} = \frac{3y}{8xa^2}$$

2. $$\frac{8m^4n^3x^2}{32mn^2x^2}$$

Solución:

Dividiendo entre 8 tanto el numerador como el denominador:

$$\frac{m^4n^3x^2}{4mn^2x^2}$$

Aplicando la propiedad de los exponentes para cocientes y simplificando:

$$\frac{m^{4-1}n^{3-2}x^{2-2}}{4} = \frac{m^3n^1x^0}{4} = \frac{m^3n}{4}$$

3. $$\frac{21a^8b^{10}c^{12}d^5}{63a^4b^3d^4c^{18}}$$

Solución:

Dividiendo entre 3 y luego entre 7 tanto el numerador como el denominador:

$$\frac{7a^8b^{10}c^{12}d^5}{21a^4b^3d^4c^{18}} = \frac{a^8b^{10}c^{12}d^5}{3a^4b^3d^4c^{18}}$$

Aplicando la propiedad de los exponentes para cocientes y simplificando:

$$\frac{a^{8-4}b^{10-3}c^{12-18}d^{5-4}}{3} = \frac{a^4b^7c^{-6}d^1}{3} = \frac{a^4b^7d}{3c^6}$$

4. $$\frac{54x^9y^{11}z^{13}y^{-9}z^{-14}w^0}{63w^2z^9w^3z^{-11}y^{12}}$$

Solución:

Dividiendo entre 3 y luego entre 3 nuevamente tanto el numerador como el denominador:

$$\frac{18x^9y^{11}z^{13}y^{-9}z^{-14}w^0}{21w^2z^9w^3z^{-11}y^{12}} = \frac{6x^9y^{11}z^{13}y^{-9}z^{-14}w^0}{7w^2z^9w^3z^{-11}y^{12}}$$

Aplicando la propiedad de los exponentes (producto y cociente) y simplificando:

$$\frac{6x^9y^{11-9}z^{13-14}w^0}{7w^{2-3}z^{9-11}y^{12}} = \frac{6x^9y^2z^{-1}w^0}{7w^{-1}z^{-2}y^{12}} = \frac{6x^9y^{2-12}z^{-1+2}w^{0+1}}{7} = \frac{6x^9y^{-10}z^1w^1}{7}$$

$$= \frac{6x^9zw}{7y^{10}}$$

5. $$\frac{15a^{12}b^3c^5d^7a^8b^5c^5}{5d^7c^{10}b^7a^{20}}$$

Solución:

Dividiendo entre 5 tanto el numerador como el denominador:

$$\frac{3a^{12}b^3c^5d^7a^8b^5c^5}{d^7c^{10}b^7a^{20}}$$

Aplicando la propiedad de los exponentes (producto y cociente) y simplificando:

$$\frac{3a^{12+8}b^{3+5}c^{5+5}d^7}{d^7c^{10}b^7a^{20}} = \frac{3a^{20}b^8c^{10}d^7}{d^7c^{10}b^7a^{20}} = 3a^{20-20}b^{8-7}c^{10-10}d^{7-7} = 3b$$

II. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES CUYOS TÉRMINOS SEAN POLINOMIOS

Regla:

Se descomponen en factores los polinomios todo lo posible y se suprimen los factores comunes al numerador y denominador.

Simplificar o reducir a su más simple expresión:

6. $\frac{2a^2}{4a^2-4ab}$

Solución:

Sacando factor común al denominador:

$$= \frac{2a^2}{4a(a-b)}$$

Dividiendo entre 2, aplicando ley de los exponentes y simplificando:

$$= \frac{a^{2-1}}{2(a-b)} = \frac{a}{2(a-b)}$$

7. $\frac{4x^2y^3}{24x^3y^3-36x^3y^4}$

Solución:

Sacando factor común al denominador:

$$= \frac{4x^2y^3}{12x^3y^3(2-3y)}$$

Dividiendo entre 4, aplicando ley de los exponentes y simplificando:

$$= \frac{x^{2-3}y^{3-3}}{3(2-3y)} = \frac{x^{-1}y^0}{3(2-3y)} = \frac{1}{3x(2-3y)}$$

8. $\frac{a^3-25a}{2a^3+8a^2-10a}$

Solución:

Sacando factor común al numerador y al denominador:

$$=\frac{a(a^2-25)}{2a(a^2+4a-5)}$$

Sacando diferencia de cuadrado en el numerador y trinomio de la forma x^2+bx+c en el denominador

$$=\frac{a(a-5)(a+5)}{2a(a+5)(a-1)}$$

Aplicando ley de los exponentes o simplificando factores semejantes:

$$=\frac{\cancel{a}(a-5)\cancel{(a+5)}}{2\cancel{a}\cancel{(a+5)}(a-1)}=\frac{(a-5)}{2(a-1)}$$

9. $\frac{3x^3-12x-x^2y+4y}{x^4-5x^3-14x^2}$

Solución:

Agrupando el numerador para luego sacar factor común por agrupación al mismo y después factor común al denominador:

$$=\frac{(3x^3-12x)-(x^2y-4y)}{x^4-5x^3-14x^2}=\frac{3x(x^2-4)-y(x^2-4)}{x^2(x^2-5x-14)}$$

Sacando factor común nuevamente en el numerador y trinomio de la forma x^2+bx+c en el denominador

$$=\frac{(x^2-4)(3x-y)}{x^2(x-7)(x+2)}$$

Sacando diferencia de cuadrado en el numerador y simplificando factores semejantes:

$$= \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}(3x-y)}{x^2(x-7)\cancel{(x+2)}} = \frac{(x-2)(3x-y)}{x^2(x-7)}$$

10. $\frac{(x^3-x)(x^3-1)}{(x^4+3x^3+2x^2)(x^2-1)}$

Solución:

Sacando factor común al primer factor del numerador, diferencia de cubos al segundo factor del numerador. Factor común al primer factor del denominador y diferencia de cuadrados al segundo factor del denominador.

$$= \frac{x(x^2-1)(x-1)(x^2-x+1)}{x^2(x^2+3x+2)(x-1)(x+1)}$$

Sacando diferencia de cuadrado al numerador y trinomio de la forma x^2+bx+c en el denominador

$$= \frac{x(x-1)(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}{x^2(x+2)(x+1)(x-1)(x+1)}$$

Aplicando ley de los exponentes y simplificando todos los factores semejantes:

$$= \frac{x^{1-2}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}(x-1)(x^2-x+1)}{(x+2)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x^{-1}(x-1)(x^2-x+1)}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{x(x+2)(x+1)}$$

11. $\frac{(4n^2+4n-3)(n^2+7n-30)}{(2n^2-7n+3)(4n^2+12n+9)}$

Solución:

Sacando trinomio de la forma ax^2+bx+c en el primer factor del numerador, trinomio de la forma x^2+bx+c en el segundo factor del numerador. Sacando trinomio de la forma ax^2+bx+c en el primer factor del denominador y nuevamente trinomio de la forma ax^2+bx+c en el segundo factor del denominador.

$$=\frac{(2n-1)(2n+3)(n+10)(n-3)}{(2n-1)(n-3)(2n+3)(2n+3)}$$

Simplificando todos los factores semejantes:

$$=\frac{\cancel{(2n-1)}\cancel{(2n+3)}(n+10)\cancel{(n-3)}}{\cancel{(2n-1)}\cancel{(n-3)}\cancel{(2n+3)}(2n+3)}=\frac{(n+10)}{(2n+3)}$$

12. $\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}$

Solución:

Sacando diferencia de cuadrados tanto al numerador como al denominador.

$$=\frac{\big(a+b-(c-d)\big)(a+b+(c-d))}{\big(a+c-(b-d)\big)(a+c+(b-d))}$$

Simplificando cada uno de los factores y organizando cada uno dentro de ellos en orden alfabético:

$$=\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{(a+c-b+d)(a+c+b-d)}=\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}$$

Simplificando factores semejantes:

$$= \frac{(a+b-c+d)\cancel{(a+b+c-d)}}{(a-b+c+d)\cancel{(a+b+c-d)}} = \frac{(a+b-c+d)}{(a-b+c+d)}$$

III. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES. CASO EN QUE HAY QUE CAMBIAR EL SIGNO A UNO O MÁS FACTORES

Regla:

Primero se descomponen en factores los polinomios todo lo posible y se suprimen los factores comunes al numerador y denominador. Y segundo se hace un cambio de signo a los factores que sean necesarios para hacer su respectiva simplificación.

- **Simplificar o reducir a su más simple expresión:**

13. $\frac{ax^2-9a}{3x-3y-x^2+xy}$

Solución:

Sacando factor común en el numerador y agrupando en dos al denominador:

$$= \frac{a(x^2-9)}{(3x-3y)-(x^2-xy)}$$

Sacando diferencia de cuadrado al numerador y factor común por agrupación al denominador:

$$= \frac{a(x-3)(x+3)}{3(x-y)-x(x-y)}$$

Sacando nuevamente factor común al denominador:

$$= \frac{a(x-3)(x+3)}{(x-y)(3-x)}$$

Observación: Nótese que arriba ningún factor se puede factorizar a simple vista. Pero si se puede hacer un cambio de signo al factor $(3-x)$ de ésta manera $-(x-3)$, los cuales son equivalentes. Así que sustituyendo esa equivalencia tenemos que:

$$= -\frac{a(x-3)(x+3)}{(x-y)(x-3)}$$

Lo cual ahora si se puede hacer la respectiva simplificación de factores semejantes:

$$= -\frac{a\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x-y)\cancel{(x-3)}} = -\frac{a(x+3)}{(x-y)}$$

14. $\left(\frac{2x^2+x-3}{1-x^3}\right)\left(\frac{x^2-4x+4}{4x^2-x^4}\right)$

Solución:

Sacando trinomio de la forma ax^2+bx+c en el primer factor del numerador, trinomio de la forma x^2+bx+c en el segundo factor del numerador. Sacando diferencia de cubos en el primer factor del denominador y factor común en el segundo factor del denominador.

$$= \frac{(2x^2+x-3)}{(1-x^3)}\frac{(x^2-4x+4)}{(4x^2-x^4)} = \frac{(2x+3)(x-1)}{(1-x)(1-x+x^2)}\frac{(x-2)(x-2)}{x^2(4-x^2)}$$

Factorizando por diferencia de cuadrados el último factor del denominador:

$$= \frac{(2x+3)(x-1)(x-2)(x-2)}{(1-x)(1-x+x^2)x^2(2-x)(2+x)}$$

Cambiando el signo al factor $(1-x)$ por $-(x-1)$ y cambiando de signo al factor $(2-x)$ por $-(x-2)$, los cuales se reemplazarán de la expresión anterior:

$$= \frac{(2x+3)(x-1)(x-2)(x-2)}{-(x-1)(1-x+x^2)x^2(-(x-2))(2+x)}$$

Multiplicando los signos y simplificando todos los factores semejantes:

$$=\frac{(2x+3)\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(1-x+x^2)x^2\cancel{(x-2)}(2+x)}$$

$$=\frac{(2x+3)(x-2)}{(1-x+x^2)x^2(2+x)}=\frac{(2x+3)(x-2)}{x^2(1-x+x^2)(2+x)}$$

15. $\frac{3mx-nx-3my+ny}{ny^2-nx^2-3my^2+3mx^2}$

Solución:

Agrupando el numerador y denominador para luego sacar factor común por agrupación al los mismos:

$$=\frac{(3mx-nx)-(3my-ny)}{(ny^2-nx^2)-(3my^2-3mx^2)}=\frac{x(3m-n)-y(3m-n)}{n(y^2-x^2)-3m(y^2-x^2)}$$

Sacando factor común nuevamente tanto al numerador como al denominador:

$$=\frac{(3m-n)(x-y)}{(y^2-x^2)(n-3m)}$$

Sacando diferencia de cuadrado en el denominador:

$$=\frac{(3m-n)(x-y)}{(y-x)(y+x)(n-3m)}$$

Haciendo un cambio de signo al factor $(y-x)$ por $-(x-y)$ y además al factor $(n-3m)$ por $-(3m-n)$, los cuales son reemplazados de la expresión anterior:

$$=\frac{(3m-n)(x-y)}{-(x-y)(y+x)-(3m-n)}$$

Multiplicando los signos y simplificando todos los factores semejantes:

$$=\frac{\cancel{(3m-n)(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(y+x)\cancel{(3m-n)}}=\frac{1}{(y+x)}$$