Ceros Reales de Polinomios

Problemas

Encontrar todos los ceros reales del polinomio.

1. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.
$P(x)$ tiene tres variaciónes de signo implica que tiene 1 ó 3 ceros positivos.
$P(-x) = -x^3 - 6x^2 - 11x - 6$, no tiene variación de signo implica que no tiene ceros negativos.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$x = 1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Por lo tanto los ceros son $1, 2$, y 3.

2. $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 4.
$P(x)$ tiene dos variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros positivos.
$P(-x) = -x^3 - 4x^2 + x + 4$, tiene una variación de signo implica que tiene 1 cero negativo.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ & & 1 & -3 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$x = 1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x-1)(x^2 - 3x - 4) = (x-1)(x-4)(x+1)$.

Por lo tanto los ceros son $-1, 1$ y 4.

3. $P(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 10$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 5,± 10.
$P(x)$ no tiene variaciónes de signo implica que no tiene ceros positivos.
$P(-x) = -x^3 + 12x^2 - 21x + 10$, tiene 3 variaciónes de signo implica que tiene 1 ó 3 ceros negativos.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 12 & 21 & 10 \\ & & -1 & -11 & -10 \\ \hline & 1 & 11 & 10 & 0 \end{array}$$

$x = -1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 10 = (x+1)(x^2 + 11x + 10) = (x+1)(x+1)(x+10) = (x+1)^2(x+10)$.

Por lo tanto los ceros son -1 y -10.

4. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2.
$P(x)$ tiene 3 variaciónes de signo implica que tiene 1 ó 3 ceros positivos.
$P(-x) = -x^3 - 4x^2 - 5x - 2$, no tiene variaciónes de signo implica que no tiene ceros negativos.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$x = 1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2) = (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2)$.

Por lo tanto los ceros son 1 y 2.

5. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, $\pm\frac{1}{2}$.
$P(x)$ tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero positivo.
$P(-x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$, tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros negativos.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ & & -2 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$x = -1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 = (x + 1)(2x^2 + x - 1) = (x + 1)(2x - 1)(x + 1) = (x + 1)^2(2x - 1)$.

Por lo tanto los ceros son -1 y $\frac{1}{2}$.

6. $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$.
$P(x)$ tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero positivo.
$P(-x) = -4x^3 + 3x - 1$, tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros negativos.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 0 & -3 & -1 \\ & & 4 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

$x = 1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = 4x^3 - 3x - 1 = (x - 1)(4x^2 + 4x + 1) = (x - 1)(2x + 1)(2x + 1) = (x - 1)(2x + 1)^2$.

Por lo tanto los ceros son 1 y $-\frac{1}{2}$.

7. $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 8x + 6$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$, $\pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{3}{4}$.
$P(x)$ no tiene variación de signo implica que no tiene ceros positivos.
$P(-x) = -4x^3 + 3x^2 - 8x + 6$, tiene 3 variaciónes de signo implica que tiene 1 ó 3 ceros negativos.

-1	4	3	8	6
		-4	1	-9
	4	-1	9	-3

$x = -1$ es cota inferior.

$-\frac{3}{4}$	4	3	8	6
		-3	0	-6
	4	0	8	0

$x = -\frac{3}{4}$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 8x + 6 = (x + \frac{3}{4})(4x^2 + 8) = (4x + 3)(x^2 + 2)$.
Como $x^2 \geq 0$ implica que $-\frac{3}{4}$ es el unico cero real.

8. $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2. $P(x)$ tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros positivos.
$P(-x) = x^4 - 3x^2 + 2$, tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros negativos.

1	1	0	-3	0	2
		1	2	-1	-1
	1	1	-1	-1	1

-1	1	0	-3	0	2
		-1	1	2	-2
	1	-1	-2	2	0

$x = -1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x+1)(x^3 - x^2 - 2x + 2) = (x+1)(x^2(x-1) - 2(x-1)) = (x+1)(x-1)(x^2-2) = (x^2-1)(x^2-2)$.

Por lo tanto los ceros son ± 1 y $\pm\sqrt{2}$.

9. $P(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 4. $P(x)$ tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero positivo.
$P(-x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$, tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero negativo.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ & & -1 & 2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$x = -1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4 = (x+1)(x^3 - 2x^2 + 2x - 4) = (x+1)(x^2(x-2) + 2(x-2)) = (x+1)(x-2)(x^2+2)$.

Por lo tanto los ceros reales son -1 y 2.

10. $P(x) = x^4 - 13x^2 - 12x$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12. $P(x)$ tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero positivo.
$P(-x) = x^4 - 13x^2 + 12x$, tiene 2 variación de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros negativos.

$P(x) = x^4 - 13x^2 - 12x = x(x^3 - 13x - 12)$

1	1	0	-13	-12
		1	1	-12
	1	1	-12	-24

-1	1	0	-13	-12
		-1	1	-12
	1	-1	-12	0

$x = -1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^4 - 13x^2 - 12x = x(x+1)(x^2 - x - 12) = x(x+1)(x-4)(x+3).$

Por lo tanto los ceros reales son $-3, -1, 0$ y 4.

11. $P(x) = 2x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 64x + 32$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16, $\pm \frac{1}{2}$. $P(x)$ tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros positivos.
$P(-x) = 2x^4 + 11x^3 - 6x^2 - 64x + 32$, tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros negativos.

1	2	-11	-6	64	32
		2	-9	-15	-49
	2	-9	-15	49	81

-1	2	-11	-6	64	32
		-2	13	-7	-57
	2	-13	7	-57	-25

$-\frac{1}{2}$	2	-11	-6	64	32
		-1	36	9	-32
	2	-12	0	64	0

Entonces,

$P(x) = 2x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 64x + 32 = (x + \frac{1}{2})(2x^3 - 12x^2 + 64)$

$= (2x + 1)(x^3 - 6x^2 + 32)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -6 & 0 & 32 \\ & & -2 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

$x = -2$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = 2x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 64x + 32 = (2x + 1)(x + 2)(x^2 - 8x + 16)$

$= (2x + 1)(x + 2)(x - 4)(x - 4) = (2x + 1)(x + 2)(x - 4)^2$.

Por lo tanto los ceros reales son $-2, -\frac{1}{2}$ y 4.

12. $P(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x$

$P(x) = x(x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 14x - 24)$
Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. $P(x)$ tiene 3 variaciónes de signo implica que tiene 1 ó 3 ceros positivos.
$P(-x) = -x^5 - 7x^4 - 10x^3 + 14x^2 + 24x$, tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero negativo.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -7 & 10 & 14 & -24 \\ & & 1 & -6 & 4 & 18 \\ \hline & 1 & -6 & 4 & 18 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -7 & 10 & 14 & -24 \\ & & 2 & -10 & 0 & 28 \\ \hline & 1 & -5 & 0 & 14 & 4 \end{array}$$

3	1	-7	10	14	-24
		3	-12	-6	24
	1	-4	-2	8	0

$x = 3$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x(x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 14x - 24) = x(x-3)(x^3 - 4x^2 - 2x + 8)$

$(x^3 - 4x^2 - 2x + 8)$ se puede factorizar por agrupación.

$(x^3 - 4x^2 - 2x + 8) = x^2(x-4) - 2(x-4) = (x^2 - 2)(x-4)$

Entonces,

$P(x) = x(x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 14x - 24) = x(x-3)(x-4)(x^2 - 2)$

Por lo tanto los ceros reales son $\pm\sqrt{2}, 0, 3$ y 4.

13. $P(x) = -2x^3 - 7x^2 + 10x + 35$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 5, ± 7, ± 35, $\pm\frac{5}{2}$, $\pm\frac{7}{2}$, $\pm\frac{35}{2}$. $P(x)$ tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero positivo.
$P(-x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 35$, tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros negativos.

1	-2	-7	10	35
		-2	-9	2
	-2	-9	1	37

-1	-2	-7	10	35
		2	5	-15
	-2	-5	15	20

-3	-2	-7	10	35
		6	3	-39
	-2	-1	13	-4

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & -2 & -7 & 10 & 35 \\ & & 10 & -15 & 25 \\ \hline & -2 & 3 & -5 & 60 \end{array}$$

$x = -5$ es cota inferior.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{7}{2} & -2 & -7 & 10 & 35 \\ & & 7 & 0 & -35 \\ \hline & -2 & 0 & 10 & 0 \end{array}$$

$x = -\frac{7}{2}$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = -2x^3 - 7x^2 + 10x + 35 = (x + \frac{7}{2})(-2x^2 + 10) = (2x + 7)(-x^2 + 5)$.

Por lo tanto los ceros reales son $\pm\sqrt{5}$ y $-\frac{7}{2}$.

14. $P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 3x - 4$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 4, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$. $P(x)$ tiene 1 variación de signo implica que tiene 1 cero positivo.
$P(-x) = 3x^4 - 4x^3 + 3x - 4$, tiene 3 variaciónes de signo implica que tiene 1 ó 3 ceros negativos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 4 & 0 & -3 & -4 \\ & & 3 & 7 & 7 & 4 \\ \hline & 3 & 7 & 7 & 4 & 0 \end{array}$$

Entonces,

$P(x) = -2x^3 - 7x^2 + 10x + 35 = (x - 1)(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 7 & 7 & 4 \\ & & -3 & -4 & -3 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & 7 & 7 & 4 \\ & & -6 & -2 & -10 \\ \hline & 3 & 1 & 5 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 3 & 7 & 7 & 4 \\ & & -9 & -6 & -39 \\ \hline & 3 & -2 & 13 & -35 \end{array}$$

$x = -3$ es cota inferior.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{4}{3} & 3 & 7 & 7 & 4 \\ & & -4 & -4 & -4 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

$x = -\frac{4}{3}$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = -2x^3 - 7x^2 + 10x + 35 = (x-1)(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4) =$
$(x-1)(x + \frac{4}{3})(x^2 + 3x + 3)$.

El descriminate $D = b^2 - 4ac$ en la formula cuadratica es $D = (3)^2 - 4(1)(3) = -3$.

Por la tanto los ceros reales son $-\frac{4}{3}$ y 1.

15. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Solución:
Los posibles ceros racionales son: ± 1, ± 2, ± 4. $P(x)$ tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros positivos.
$P(-x) = x^4 - 5x^2 + 4$ tiene 2 variaciónes de signo implica que tiene 0 ó 2 ceros negativos.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\
  &   & 1 & 1 & -4 & -4 \\
\hline
  & 1 & 1 & -4 & -4 & 0
\end{array}
$$

$x = 1$ es un cero.

Entonces,

$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x^3 + x^2 - 4x - 4) = (x-1)(x^2(x+1) - 4(x+1))$
$= (x-1)(x+1)(x^2-4) = (x^2-1)(x^2-4)$.

Por lo tanto los ceros reales son ± 1 y ± 2.